

МЕТОД СИНТЕЗА НЕИЗБЫТОЧНЫХ СХЕМ В БАЗИСЕ ЖЕГАЛКИНА, ДОПУСКАЮЩИХ ЕДИНИЧНЫЕ ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛИНЫ ОДИН¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Тестирование схем из функциональных элементов – важная теоретическая задача, имеющая практические приложения к тестированию и верификации СБИС. Целью данной работы является демонстрация возможности построения для произвольной булевой функции схемы из функциональных элементов, реализующей эту функцию и допускающей короткий единичный диагностический тест при инверсных неисправностях на выходах элементов.

Материалы и методы. При получении основных результатов использовались методы синтеза схем, основанных на разложении булевой функции в полином Жегалкина.

Результаты. Устанавливается, что для произвольной булевой функции f , зависящей от n переменных, существует избыточная реализующая функцию f схема из функциональных элементов в базисе $\{x \& y, x \oplus y, 1\}$, допускающая единичный диагностический тест длины 1 при инверсных неисправностях на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, диагностический тест, инверсная неисправность на выходе элемента, функция Шеннона, легко-тестируемая схема.

D. S. Romanov

A METHOD OF SYNTHESIS OF IRREDUNDANT CIRCUITS (IN ZHEGALKIN'S BASIS) ADMITTING SINGLE FAULT DIAGNOSTIC TEST SETS WITH CARDINALITY 1

Abstract.

Background. Testing of combinational circuits is an important theoretical problem with applications to testing and verification of VLSI. The aim of this work is to demonstrate that for an arbitrary Boolean function it is possible to construct a circuit realizing this function and allowing a small single fault diagnosing test set (under inverse faults at outputs of gates).

Materials and methods. Circuit design methods based on Zhegalkin polynomials (canonical Reed-Muller polynomial forms) were used.

Results. It has been established that for an arbitrary Boolean function f , depending on n variables, there exists an irredundant combinational circuit (in the basis $\{x \& y, x \oplus y, 1\}$) realizing f and admitting the single fault diagnosing test set (under inverse faults at outputs of gates).

Key words: combinational circuit, fault diagnostic test set, inverse fault at output of gate, Shannon function, easily testable circuit.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-07474-а и № 13-01-00958-а).

Схемы из функциональных элементов (СФЭ) – одна из классических моделей управляющих систем без памяти. Анализ функционирования СФЭ при возникновении в них неисправностей традиционно осуществляется с помощью тестового подхода, предложенного в работах С. В. Яблонского и И. А. Чегис [1, 2] в середине 1950-х гг. В рамках этого подхода предполагается, что на схему S с входами $x_1, x_2, \dots, x_n$, реализующую булеву функцию или систему булевых функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, действует источник неисправностей U , способный преобразовать схему S к одной из СФЭ (с такими же входами и выходами, что и у S) некоторого заранее известного списка H конечной длины, содержащего и исходную схему. Действие источника неисправностей однократное в том смысле, что во время исследования схемы источник неисправностей уже перестал действовать на схему. Исследование схемы заключается в подаче на входы схемы входных наборов и в изучении выходных значений на этих наборах. Множество T входных наборов называется *проверяющим тестом* для схемы S относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда для любой схемы S_1 из списка H имеет место импликация: если S_1 реализует некоторую булеву функцию или систему булевых функций f_1 , неравную f , то найдется набор $\tilde{\alpha}$ из T такой, что $f_1(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\alpha})$. Множество T входных наборов называется *диагностическим тестом* для схемы S относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда для любых двух схем S_1, S_2 из списка H имеет место импликация: если S_1 и S_2 реализуют неравные булевы функции или системы булевых функций f_1 и f_2 соответственно, то найдется набор $\tilde{\alpha}$ из T такой, что $f_1(\tilde{\alpha}) \neq f_2(\tilde{\alpha})$. Число наборов в тесте T называется длиной теста и обозначается $L(T)$. Тест минимальной длины называется минимальным. Источник неисправностей U , способный вызвать поломку не более чем одного элемента схемы, называется *единичным*; тесты относительно такого источника также называются *единичными*. Тесты относительно источника, способного вызвать произвольное число поломок элементов, называются *полными*. Схема S при любой неисправности, под действием источника неисправностей U реализующая функцию или систему функций, неравную функции или системе функций, реализуемой схемой S при отсутствии неисправностей, называется *тестопригодной* относительно источника неисправностей S . Схема, тестопригодная относительно единичного источника неисправностей, называется *неизбыточной* [3, с. 110–111; 4, с. 15–16]. Под длиной минимального проверяющего (диагностического) теста для булевой функции или системы функций f , реализованной с помощью СФЭ в базисе B , относительно источника неисправностей U понимается величина $L_B^{detect}(U, f)$, равная минимуму по всем тестопригодным реализующим f СФЭ S в базисе B минимума по всем проверяющим (соответственно диагностическим) тестам T для S относительно U величины $L(T)$. Пусть $\hat{P}_2(n)$ – множество всех булевых функций, существенно зависящих от всех своих n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Функцией Шеннона* длины проверя-

ющего (диагностического) теста для реализованной с помощью СФЭ в базисе B булевой функции f относительно источника неисправностей U называется величина $L_B^{detect}(U, n) = \max_{f \in P_2(n)} L_B^{detect}(U, f)$ (соответственно величина $L_B^{diagn}(U, n) = \max_{f \in P_2(n)} L_B^{diagn}(U, f)$).

Неисправность в некотором месте схемы (на входе схемы или функционального элемента или на выходе функционального элемента) называется константной, если для каждого входного набора значение, вычисляемое в этом месте, заменяется на какую-то константу. Неисправность в некотором месте схемы называется инверсной, если значение, вычисляемое в этом месте при отсутствии данной неисправности (все остальные неисправности в схеме, если они есть, при этом сохраняются), заменяется на противоположное. Условимся о следующих обозначениях для источников неисправностей в СФЭ. Обозначение для источника неисправностей будет иметь вид X_z^y , где X – одна или несколько заглавных латинских букв, указывающих на место возможной неисправности (P – неисправности на входах схем, I – на входах функциональных элементов, O – на выходах функциональных элементов), y – название типа неисправности ($const$, 0 , 1 – константные неисправности, константные неисправности типа 0 и константные неисправности типа 1 соответственно, inv – инверсные неисправности), z указывает на число возможных неисправностей (k , если неисправностей не больше k ; нижний индекс отсутствует, если ограничений на число неисправных элементов в схеме нет).

Приведем обзор некоторых работ, связанных с оценками функций Шеннона длин тестов для СФЭ. В классической работе С. М. Редди [5] было доказано, что в базисе Жегалкина $B_1 = \{x \& y, x \oplus y, 1\}$ имеют место неравенства:

$$1) L_{B_1}^{detect}(IO_1^{const}, n) \leq n + 4 \text{ (формально говоря, в [5] это доказывалось}$$

при введении одного дополнительного входа, однако в [3, с. 113–116] указанная оценка понижена до $n + 3$ без введения дополнительного входа);

$$2) L_{B_1}^{detect}(PIO_1^{const}, n) \leq 3n + 4 \text{ (в [5] отмечалось, что, введя два допол-}$$

нительных выхода, можно понизить верхнюю оценку до $n + 4$).

В статье [6] доказано следующее неравенство:

$$L_{B_1}^{detect}(IO_k^{const}, n) \leq 4 + \sum_{j=1}^{\lfloor \log 2k \rfloor} \binom{n}{j}$$

(формально говоря, в [6] это доказывалось при введении одного дополнительного входа, однако техникой из [3, с. 113–116] указанная оценка доказывается без введения дополнительного входа). Н. П. Редькиным были получены следующие результаты:

1) для произвольного полного конечного базиса B была найдена [7, 8] верхняя оценка: $L_B^{detect}(O^{const}, n) \leq 2(2^{\lfloor n/2 \rfloor} + 2^{\lceil n/2 \rceil} + n)$;

$$2) L_{B_0}^{detect}(I^0, n) = L_{B_0}^{detect}(I^1, n) \leq O(2^{n/2}) \quad [9];$$

$$3) L_{B_0}^{detect}(O^0, n) = L_{B_0}^{detect}(O^1, n) \leq n \quad [10];$$

$$4) L_{B_0}^{diagn}(O_1^0, n) = L_{B_0}^{diagn}(O_1^1, n) \leq 2n + 1 \quad [11];$$

$$5) \text{ в бесконечном базисе } B_0^\infty = \{\bar{x}\} \cup \bigcup_{i \geq 2} \{x_1 \& \dots \& x_i, x_1 \vee \dots \vee x_i\} \text{ имеет}$$

$$\text{место неравенство [12]: } L_{B_0^\infty}^{diagn}(O_1^0, n) = L_{B_0^\infty}^{diagn}(O_1^1, n) \leq 2\lceil \log_2(n+1) \rceil + 1.$$

В работе [13] доказано, что

$$L_{B_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) \leq n + 1 \quad [13, \text{теорема 2}], \quad L_{B_1}^{diagn}(O^{inv}, n) \leq 2^{n-2}.$$

В работах [14–16] установлено, что для любого $n \in N$ в произвольном полном базисе B имеет место оценка $L_B^{detect}(O_1^{const}, n) \leq n + 3$. В статье [17] для каждой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ установлено существование в произвольном полном базисе схемы S с тремя дополнительными входами и одним дополнительным выходом такой, что функция f является подфункцией одной из двух функций, реализуемой схемой S , а длина теста, проверяющего не более чем k произвольных неисправностей элементов или блоков схемы, ведет себя как $O(n + 2^k)$. В работе [18] доказано, что в бесконечном базисе $B_1^\infty = \{x \oplus y, 1\} \cup \bigcup_{i \geq 2} \{x_1 \& \dots \& x_i, x_1 \vee \dots \vee x_i\}$ с $\lceil \sqrt{n} \rceil$ дополнительными входами можно строить тестопригодные схемы, допускающие проверяющий тест относительно IO_1^{const} длины не более $2\sqrt{n} \cdot (1 + o(1))$.

Особый интерес представляют константные верхние оценки функций Шеннона длины теста. Первые результаты такого типа предполагали введение дополнительных входов и выходов в схему. Так, в статье [19] для произвольной СФЭ в базисе $\{x | y, \bar{x}\}$ был предложен метод ее перестраивания в тестопригодную схему в базисе $\{x | y, x \oplus y, \bar{x}\}$, допускающую полный проверяющий тест длины 5 относительно константных неисправностей на входах и выходах функциональных элементов, при этом число дополнительных как входов, так и выходов сравнимо с числом элементов схемы. В статье [20] для произвольной СФЭ в базисе $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$ (возможны и элементы $x | y, x \downarrow y$) был предложен метод ее перестраивания в тестопригодную схему в том же базисе, допускающую полный проверяющий тест длины 3 относительно константных неисправностей на входах и выходах функциональных элементов, при этом число дополнительных выходов практически равно числу элементов схемы, а число дополнительных входов равно шести; также в этой статье указывается на неулучшаемость в общем случае верхней оценки 3 длины единичного теста относительно константных неисправностей на входах элементов. В работе [21] предложен базис из четырехвходовых функциональных элементов такой, что любую булеву функцию можно реализовать в этом базисе как подфункцию схемой с двумя дополнительными входами,

допускающей полный проверяющий тест длины 2 при константных неисправностях на выходах элементов (возможны также константные неисправности на всех входах схемы и элементов схемы, не являющихся дополнительными входами). В статье [22] предложен базис из шестивходовых функциональных элементов такой, что любую булеву функцию можно реализовать в этом базисе как подфункцию схемой с четырьмя дополнительными входами, допускающей полный проверяющий тест длины 2 при константных неисправностях на выходах элементов (возможны также константные неисправности на всех входах схемы и элементов схемы, но при этом в каждом элементе число неисправных входов, являющихся дополнительными входами схемы, не должно превосходить 1). В работе [23] предложен метод синтеза таких схем с одним дополнительным входом и четырьмя дополнительными выходами в базисе из специальных двух- и трехвыходных функциональных блоков, которые допускают полный проверяющий тест длины 3 при константных неисправностях на входах и выходах блоков.

С 2000 г. стали появляться константные верхние оценки функций Шеннона длины теста без введения дополнительных входов. Так, в работе [13, теорема 1] доказано равенство $L_{B_1}^{detect}(O_1^{inv}, n) = 1$. В статье [24] получен такой результат: в произвольном полном базисе B имеет место оценка

$$L_B^{detect}(O_1^{inv}, n) \leq 3.$$

Установлены следующие равенства: $L_{B_0}^{detect}(O^0, n) = L_{B_0}^{detect}(O^1, n) = 2$ при $n > 1$ [25], $L_{B_1}^{detect}(O_1^1, n) = 1$ [26], $L_{B_1}^{detect}(O^0, n) = 1$ [27]. Отметим, впрочем, что $L_{\{x|y\}}^{detect}(O^1, n) \geq n + 1$ [28]. Автором настоящей статьи найдены [29, 30] примеры полных конечных базисов B' , B'' таких, что

$$2 \leq L_{B'}^{detect}(O^{const}, n) \leq 4, \quad 2 \leq L_{B''}^{detect}(O^{inv}, n) \leq 4,$$

а также доказано [31], что в любом полном конечном базисе B

$$2 \leq L_B^{detect}(O_1^{const}, n) \leq 4.$$

С учетом классических результатов о поведении функций Шеннона длины проверяющего теста при неисправностях на входах схем (схемный базис при этом не имеет значения)

$$\begin{aligned} L^{detect}(P^{const}, n) &= L^{detect}(P_1^{const}, n) = \\ &= \begin{cases} 2n - 2t - 1, & \text{если } n = 2^t + t + 1, \\ 2n - 2t - 2, & \text{если } 2^t + t + 1 < n \leq 2^{t+1} + t + 1 \end{cases} \quad [32, 33]; \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 &\leq L^{detect}(P^{inv}, n) \leq n \quad [33], \end{aligned}$$

из результатов [29–31] вытекают утверждения 1–2.

Утверждение 1. Существуют конечные полные базисы B' , B'' такие, что

$$2n - 2t - 2 \leq L_{B'}^{detect}(PO^{\text{const}}, n) \leq 2n - 2t + 3$$

(где t определяется из неравенств $2^t + t + 1 \leq n \leq 2^{t+1} + t + 1$),

$$2 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \leq L_{B''}^{detect}(PO^{inv}, n) \leq n + 4.$$

Утверждение 2. В любом конечном полном базисе B имеют место неравенства

$$2n - 2t - 2 \leq L_B^{detect}(PO_1^{\text{const}}, n) \leq 2n - 2t + 3,$$

где t определяется из неравенств $2^t + t + 1 \leq n \leq 2^{t+1} + t + 1$.

В данной работе доказывается, что функция Шеннона длины единичного диагностического теста относительно инверсных неисправностей на выходах элементов в базисе $B_1 = \{x \& y, x \oplus y, 1\}$ равна 1. Основная идея доказательства будет сводиться к тому, что при любой одиночной инверсной неисправности элемента в схеме, реализующей произвольную булеву функцию f , схема в неисправном состоянии реализует функцию $\bar{f}$. Основному результату предпослано аналогичное утверждение для менее «естественного», но допускающего более простую конструкцию базиса. Обозначим через $\Psi_1(y_1, y_2, y_3, y_4)$ булеву функцию, вектор значений которой имеет вид (01111111111101), а через $\Psi_2(y_1, y_2, y_3, y_4)$ – булеву функцию, вектор значений которой имеет вид (0111110000111101). Положим

$$\hat{B}_1 = \{x \& y, x \oplus y, 1, \Psi_1(y_1, y_2, y_3, y_4), \Psi_2(y_1, y_2, y_3, y_4)\}.$$

Обозначения для названий схем, подсхем и элементов схем будут сохраняться лишь в пределах одного доказательства теоремы.

Теорема 1. При $n \in N \cup \{0\}$ имеет место равенство $L_{\hat{B}_1}^{diagn}(O_1^{inv}, n) = 1$.

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, формально зависящая от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Для функций, каждая из которых может быть реализована схемой, состоящей из одного функционального элемента, и не являющихся селекторными, очевидно, что $L_{\hat{B}_1}^{diagn}(O_1^{inv}, f) = 1$ (для селекторной функции $f = x_i$ имеет место равенство $L_{\hat{B}_1}^{diagn}(O_1^{inv}, f) = 0$).

Будем теперь считать, что функция f существенно зависит от всех своих переменных и не реализуется схемами из одного элемента.

Запишем полином Жегалкина функции f в виде $P_f = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_t \oplus a_0$, где K_i – монотонные конъюнкции различных переменных или переменные ($i = \overline{1, t}$), $a_0 \in \{0, 1\}$. Будем, не ограничивая общности, считать,

что слагаемые $K_1, K_2, \dots, K_q$ ($0 \leq q \leq t$) нелинейные, а слагаемые $K_{q+1}, K_{q+2}, \dots, K_t$ – переменные. Опишем устройство избыточной схемы S , реализующей f и допускающей единичный диагностический тест длины 1.

Случай 1. Пусть функция f нелинейная ($q > 0$). Пусть монотонная конъюнкция K_i имеет вид $x_{v_1} x_{v_2} \& \dots \& x_{v_r}$ ($i \in \{1, \dots, q\}$, $2 \leq r \leq n$, $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_r \leq n$). Реализуем K_i цепочкой конъюнкторов Z_i^1 . При этом на входы первого элемента $E_{i,1}^1$ цепочки Z_i^1 подаются переменные x_{v_1}, x_{v_2} , на первый вход j -го конъюнктора $E_{i,j}^1$ ($j \in \{2, \dots, r-1\}$) цепочки подается выход предыдущего конъюнктора $E_{i,j-1}^1$; на второй вход конъюнктора $E_{i,j}^1$ цепочки подается переменная $x_{v_{j+1}}$. Для каждой цепочки Z_i^1 построим две ее копии Z_i^2, Z_i^3 (названия элементов этих цепочек отличаются от названий соответствующих элементов цепочки Z_i^1 лишь верхним индексом, повторяющим верхний индекс названия той цепочки, которой принадлежит элемент). Для тройки цепочек Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3 построим контролируемую цепочку Z_i^4 , устроенную следующим образом. Первый элемент этой цепочки $E_{i,1}^4$ – это элемент сложения по модулю 2, на оба входа которого подается переменная x_1 . Элемент $E_{i,j}^4$ ($j \in \{2, \dots, r-1\}$) цепочки Z_i^4 – это элемент, реализующий функцию Ψ_1 ; на первый, второй и третий входы этого элемента подаются выходы элементов $E_{i,j-1}^1, E_{i,j-1}^2, E_{i,j-1}^3$ соответственно, на четвертый вход подается выход элемента $E_{i,j-1}^4$. Элемент $E_{i,r}^4$ цепочки Z_i^4 – это элемент, реализующий функцию Ψ_2 ; на первый, второй и третий входы этого элемента подаются выходы элементов $E_{i,r-1}^1, E_{i,r-1}^2, E_{i,r-1}^3$ соответственно, на четвертый вход подается выход элемента $E_{i,r-1}^4$. Построив такие четверки цепочек для каждой конъюнкции K_i ($i \in \{1, \dots, q\}$), завершим синтез схемы S , добавив еще цепочку Z , состоящую из элементов сумм по модулю 2. При этом на входы самого первого элемента E_1 цепочки Z подаются выходы последних элементов цепочек Z_1^1, Z_1^4 ; на первый вход каждого элемента E_u ($u \in \{2, \dots, t+q-1+a_0\}$) суммы по модулю 2 в цепочке Z подается выход предыдущего элемента E_{u-1} ; на вторые входы элементов $E_2, E_3, \dots, E_{2q-2}, E_{2q-1}$ цепочки Z подаются выходы последних элементов цепочек $Z_2^1, Z_2^4, \dots, Z_q^1, Z_q^4$ соответственно; на вторые входы следующих $(t-q)$ элементов цепочки Z подаются переменные, равные конъюнкциям $K_{q+1}, K_{q+2}, \dots, K_t$; наконец, при $a_0 = 1$ на второй вход элемента E_{t+q} подается выход эле-

мента E_0 , реализующего константу 1. Выход элемента $E_{t+q-1+a_0}$ является выходом схемы. Легко видеть, что при отсутствии неисправностей схема S реализует функцию f (так как в силу построения в схеме S по модулю 2 суммируются слагаемые полинома Жегалкина функции f по одному разу каждое, а также q нулей, возникших на выходах последних элементов цепочек $Z_1^4, Z_2^4, \dots, Z_q^4$ (поскольку при отсутствии неисправностей на три первых входа любого элемента $E_{i,j}^4$ ($j > 1$) подаются одинаковые значения, а на четвертый вход подается 0, вычисленный на выходе элемента $E_{i,j-1}^4$).

Предположим теперь, что в схеме S произошла инверсная неисправность на выходе какого-то элемента. Докажем, что реализуемая при этом функция равна $\bar{f}$, так что любой набор образует единичный диагностический тест для схемы S .

Сразу заметим, что одиночная инверсная неисправность элемента E_j для любого $j \in \{\bar{a}_0, \dots, t+q-1+a_0\}$ будет обнаружена при подаче на входы схемы S любого набора $\tilde{\alpha}$, так как на выходе неисправной схемы возникнет значение $\bar{f}(\tilde{\alpha})$.

Пусть теперь неисправен какой-то элемент $E_{i,j}^4$. При отсутствии неисправности на выходе этого элемента (при подаче набора $\tilde{\alpha}$ на входы схемы) возникал 0, теперь возникает 1, и эта единица передается в силу определения функций Ψ_1, Ψ_2 вплоть до выхода последнего элемента цепочки Z_i^4 , где попадает на вход какого-то элемента цепочки Z вместо нуля, который возник бы там при отсутствии неисправностей. А так как значения на выходах всех остальных цепочек $Z_2^1, Z_2^4, \dots, Z_q^1, Z_q^4$ (кроме Z_i^4) совпадают с вычисленными при отсутствии неисправности, то на выходе схемы возникнет значение $\bar{f}(\tilde{\alpha})$.

Пусть, наконец, неисправен какой-то конъюнктор $E_{i,j}^d$ ($d \in \{1, 2, 3\}$). При отсутствии неисправностей в схеме на выходах элементов $E_{i,j'}^1, E_{i,j'}^2, E_{i,j'}^3$ (при подаче набора $\tilde{\alpha}$ на входы схемы) были одинаковые значения, и на выходах всех элементов цепи Z_i^4 возникал 0, теперь же ситуация оказывается следующей. На выходах $E_{i,j}^1, E_{i,j}^2, E_{i,j}^3$ возникают оба значения (0 и 1) и начиная с элемента $E_{i,j+1}^4$ вплоть до предпоследнего элемента цепи Z_i^4 на выходах этих элементов возникают единицы. Единица оказывается на правом входе последнего элемента цепи Z_i^4 . Рассмотрим значения на выходах последних элементов цепей Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3 . Очевидно, что два из трех этих значений вычислены при отсутствии неисправностей в цепях и совпадают с правильными значениями. Третье значение может либо совпадать с двумя другими, либо отличаться от них. По определению функции Ψ_2 при значении 1

ее четвертого аргумента или при несовпадении всех значений первых трех аргументов значение Ψ_2 будет нулевым, если и только если первый аргумент отличается от второго и третьего (т.е. на выходе последнего элемента цепочки Z_i^1 вычисленное значение неправильное). Теперь ясно, что на выходе схемы возникнет значение $\bar{f}(\tilde{\alpha})$, поскольку значения на выходах всех остальных цепочек $Z_2^1, Z_2^4, \dots, Z_q^1, Z_q^4$ (кроме Z_i^1, Z_i^4) совпадают с вычисленными при отсутствии неисправности, а сумма отличий значений на выходах цепочек Z_i^1, Z_i^4 от вычисленных при отсутствии неисправностей равна 1.

Таким образом, в случае любой одиночной инверсной неисправности на выходе элемента функция, реализуемая неисправной схемой, равна $\bar{f}$, так что любой набор образует единичный диагностический тест.

Случай 2. Пусть функция f линейная ($q = 0$). Тогда схема S по сравнению с предыдущим случаем упрощается до цепочки Z , состоящей из элементов сумм по модулю 2. При этом на входы самого первого элемента E_1 цепочки Z подаются переменные, равные конъюнкциям K_1, K_2 ; на первый вход каждого элемента E_u ($u \in \{2, \dots, t-1+a_0\}$) суммы по модулю 2 в цепочке Z подается выход предыдущего элемента E_{u-1} ; на вторые входы элементов $E_2, E_3, \dots, E_{t-1}$ цепочки Z подаются выходы переменные, равные конъюнкциям $K_3, K_4, \dots, K_t$; наконец, при $a_0 = 1$ на второй вход элемента E_t подается выход элемента E_0 , реализующего константу 1. Выход элемента E_{t-1+a_0} является выходом схемы. Одиночная инверсная неисправность элемента E_j для любого $j \in \{\bar{a}_0, \dots, t-1+a_0\}$ будет обнаружена при подаче на входы схемы S любого набора $\tilde{\alpha}$, так как на выходе неисправной схемы возникнет значение $\bar{f}(\tilde{\alpha})$.

Теорема доказана.

Докажем теперь основной результат работы – теорему 2. Теорема 2 усиливает результат теоремы 1 из статьи [13] и улучшает результат теоремы 2 из статьи [13].

Теорема 2. При $n \in N \cup \{0\}$ имеет место равенство $L_{B_1}^{diag}(O_1^{inv}, n) = 1$.

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, формально зависящая от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Для функций, каждая из которых может быть реализована схемой, состоящей из одного функционального элемента, и не являющихся селекторными, очевидно, что $L_{B_1}^{diag}(O_1^{inv}, f) = 1$ (для селекторной функции $f = x_i$ имеет место равенство $L_{B_1}^{diag}(O_1^{inv}, f) = 0$). Будем теперь считать, что функция f существенно зависит от всех своих переменных и не реализуется схемами из одного элемента.

Запишем полином Жегалкина функции f в виде

$$P_f = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_t \oplus a_0,$$

где K_i – монотонные конъюнкции различных переменных или переменные ($i = \overline{1, t}$), $a_0 \in \{0, 1\}$. Будем, не ограничивая общности, считать, что слагаемые $K_1, K_2, \dots, K_q$ ($0 \leq q \leq t$) нелинейные, а слагаемые $K_{q+1}, K_{q+2}, \dots, K_t$ – переменные. Опишем устройство избыточной схемы S , реализующей f и допускающей единичный диагностический тест длины 1.

Случай 1. Пусть функция f – нелинейная ($q > 0$). Пусть монотонная конъюнкция K_i имеет вид $x_{v_1} x_{v_2} \& \dots \& x_{v_r}$ ($i \in \{1, \dots, q\}$, $2 \leq r \leq n$, $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_r \leq n$). Реализуем K_i цепочкой конъюнкторов Z_i^1 . При этом на входы первого элемента $E_{i,1}^1$ цепочки Z_i^1 подаются переменные x_{v_1} , x_{v_2} , на первый вход j -го конъюнктора $E_{i,j}^1$ ($j \in \{2, \dots, r-1\}$) цепочки подается выход предыдущего конъюнктора $E_{i,j-1}^1$; на второй вход конъюнктора $E_{i,j}^1$ цепочки подается переменная $x_{v_{j+1}}$. Для каждой цепочки Z_i^1 построим две ее копии Z_i^2, Z_i^3 (названия элементов этих цепочек отличаются от названий соответствующих элементов цепочки Z_i^1 лишь верхним индексом, повторяющим верхний индекс названия той цепочки, которой принадлежит элемент). Для тройки цепочек Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3 построим контролируемую подсхему S_i , устроенную следующим образом. Выходы каждой пары элементов $E_{i,j}^1, E_{i,j}^2$ подаются на входы элемента $E_{i,j}^4$ сложения по модулю 2 ($j = \overline{1, r-1}$), входящего в подсхему S_i . Выходы каждой пары элементов $E_{i,j}^1, E_{i,j}^3$ подаются на входы элемента $E_{i,j}^5$ сложения по модулю 2 ($j = \overline{1, r-1}$), входящего в подсхему S_i . Затем в подсхеме S_i строится цепочка Z_i^4 из подсхем $S_{i,l}$ ($l = \overline{1, 2r-3}$), устроенных следующим образом. Подсхема $S_{i,l}$ имеет два входа (обозначим их пока y_1, y_2) и один выход и реализует дизъюнкцию своих входов в соответствии с формулой $A_1 = ((y_1 \& y_2) \oplus y_1) \oplus y_2$, при этом функциональные элементы подсхемы $S_{i,l}$ обозначаются так: $E_{i,l,1}^6$ – конъюнктор в формуле A_1 , $E_{i,l,2}^6$ – первый элемент сложения по модулю 2 в формуле A_1 , $E_{i,l,3}^6$ – второй элемент сложения по модулю 2 в формуле A_1 . Опишем устройство цепочки Z_i^4 . На входы подсхемы $S_{i,1}$ подаются выходы элементов $E_{i,1}^4$ и $E_{i,1}^5$. На второй вход каждой подсхемы $S_{i,l}$ ($l > 1$) подается выход предыдущей подсхемы $S_{i,l-1}$. На первые входы подсхем $S_{i,2}, S_{i,3}, S_{i,4}, S_{i,5}, \dots, S_{i,2r-4}, S_{i,2r-3}$ подаются выходы элементов $E_{i,2}^4, E_{i,2}^5, E_{i,3}^4, E_{i,3}^5, \dots, E_{i,r-1}^4, E_{i,r-1}^5$ соответственно. Наконец, в подсхеме S_i имеется еще

подсхема S'_i , состоящая лишь из конъюнктора E_i^8 , на первый вход которого подается выход элемента $E_{i,r-1}^4$, а на второй вход – выход элемента $E_{i,r-1}^5$. Построение подсхемы S_i завершено.

Построив такие тройки цепочек Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3 и подсхемы S_i для каждой конъюнкции K_i ($i \in \{1, \dots, q\}$), завершим синтез схемы S , добавив еще цепочку Z , состоящую из $2q+t-1+a_0$ элементов сумм по модулю 2. При этом на входы самого первого элемента E_1 цепочки Z подаются выходы последнего элемента цепочки Z_1^1 и выход элемента E_1^8 ; на первый вход каждого элемента E_u ($u \in \{2, \dots, 2q+t-1+a_0\}$) суммы по модулю 2 в цепочке Z подается выход предыдущего элемента E_{u-1} ; на второй вход элемента E_2 цепочки Z подается выход выходного элемента $E_{1,2r-3,3}^6$ последней подсхемы $S_{1,2r-3}$ цепочки Z_1^4 ; на вторые входы элементов $E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, \dots, E_{3q-3}, E_{3q-2}, E_{3q-1}$ цепочки Z подаются выходы выходных элементов $Z_2^1, S'_2, Z_2^4, Z_3^1, S'_3, Z_3^4, \dots, Z_q^1, S'_q, Z_q^4$ соответственно; на вторые входы следующих $(t-q)$ элементов цепочки Z подаются переменные, равные конъюнкциям $K_{q+1}, K_{q+2}, \dots, K_t$; наконец, при $a_0 = 1$ на второй вход элемента E_{2q+t} подается выход элемента E_0 , реализующего константу 1. Выход элемента $E_{2q+t-1+a_0}$ является выходом схемы.

Легко видеть, что при отсутствии неисправностей схема S реализует функцию f (так как в силу построения в схеме S по модулю 2 суммируются слагаемые полинома Жегалкина функции f по одному разу каждое, а также $2q$ нулей, возникших:

а) на выходах последних элементов цепочек $Z_1^4, Z_2^4, \dots, Z_q^4$ (поскольку при отсутствии неисправностей в схеме на обоих входах и на выходе любой подсхемы $S_{i,l}$ оказываются нули);

б) на выходах элементов $E_1^8, E_2^8, \dots, E_q^8$ (поскольку при отсутствии неисправностей в схеме на обоих входах и на выходе любого элемента E_i^8 оказываются нули).

Предположим теперь, что в схеме S произошла инверсная неисправность на выходе какого-то элемента. Докажем, что реализуемая при этом функция равна $\bar{f}$, так что любой набор образует единичный диагностический тест для схемы S .

Сразу заметим, что одиночная инверсная неисправность элемента E_j для любого $j \in \{\bar{a}_0, \dots, 2q+t-1+a_0\}$ будет обнаружена при подаче на входы схемы S любого набора $\tilde{\alpha}$, так как на выходе неисправной схемы возникнет значение $\bar{f}(\tilde{\alpha})$.

Пусть теперь неисправен какой-то элемент E_i^8 . На произвольном входном наборе $\tilde{\alpha}$ при указанной неисправности значение на выходе схемы изменится на противоположное, ибо выход неисправного элемента не ветвится и от этого выхода к выходу схемы ведет цепочка элементов сложения по модулю 2.

На произвольном входном наборе $\tilde{\alpha}$ при неисправности элемента $E_{i,j}^4$ или $E_{i,j}^5$ ($1 \leq j \leq r-1$) значение на выходе той подсхемы $S_{i,l}$, на вход которой подан выход неисправного элемента, а также значения на выходах подсхем $S_{i,l+1}, \dots, S_{i,2r-3}$ изменятся с нулей на единицы. При неисправности $E_{i,r-1}^4$ или $E_{i,r-1}^5$ значение на выходе конъюнктора E_i^8 не изменится (останется равным нулю, поскольку на второй вход этого конъюнктора поступает нуль). Поэтому в целом среди значений, подаваемых на входы цепочки Z , изменится ровно одно, так что значение на выходе схемы изменится на противоположное.

Пусть неисправен какой-то конъюнктор $E_{i,j}^d$ ($d \in \{1, 2, 3\}$). При отсутствии неисправностей в схеме на выходах элементов $E_{i,j'}^1, E_{i,j'}^2, E_{i,j'}^3$ (при подаче набора $\tilde{\alpha}$ на входы схемы) были одинаковые значения, и на выходах всех элементов $E_{i,j'}^4, E_{i,j'}^5$, на выходах всех подсхем $S_{i,l}$ цепи Z_i^4 и на выходе E_i^8 возникали нули, теперь же ситуация оказывается следующей. На выходах $E_{i,j}^1, E_{i,j}^2, E_{i,j}^3$ возникают оба значения (0 и 1), на выходе хотя бы одного из элементов $E_{i,j}^4$ и $E_{i,j}^5$ возникает единица и начиная с той подсхемы $S_{i,l}$ с наименьшей глубиной конъюнктора, на вход которой подается выход элемента $E_{i,j}^4$ или $E_{i,j}^5$ с неправильным значением, на выходе $S_{i,l}$ и выходах следующих подсхем $S_{i,l+1}, \dots, S_{i,2r-3}$ возникают единицы. Рассмотрим значения a, b, c на выходах последних элементов $E_{1,r-1}^1, E_{1,r-1}^2, E_{1,r-1}^3$ цепей Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3 соответственно. Очевидно, что два из трех этих значений вычислены при отсутствии неисправностей в цепях и совпадают с правильными значениями.

Третье значение может либо совпадать с двумя другими, либо отличаться от них. Если все три эти значения одинаковы, то на выходах элементов $E_{1,r-1}^4$ и $E_{1,r-1}^5$ – нули, на выходе конъюнктора E_i^8 – тоже нуль, так что с учетом правильности значения на выходе $E_{1,r-1}^1$ на выходе схемы возникает неправильное значение $\bar{f}(\tilde{\alpha})$. Если значение a отличается и от b , и от c , то на выходе $E_{1,r-1}^1$ вычислено неправильное значение. Но при этом на выходах $E_{1,r-1}^4$ и $E_{1,r-1}^5$ возникают единицы (а не нули), на выходе конъюнктора E_i^8 –

тоже единица (а не ноль), так что с учетом неправильности значений на выходах $E_{1,r-1}^1$ и $E_{i,2r-3,3}^6$ на выходе схемы возникает неправильное значение $\bar{f}(\tilde{\alpha})$. Если же, наконец, значение a совпадает с одним из значений b , c и не совпадает с другим, то на выходах ровно одного из двух элементов $E_{1,r-1}^4$ и $E_{1,r-1}^5$ возникает ноль, на выходе конъюнктора E_i^8 – тоже ноль, так что с учетом правильности значения на выходе $E_{1,r-1}^1$ на выходе схемы возникает неправильное значение $\bar{f}(\tilde{\alpha})$.

Таким образом, в случае любой одиночной инверсной неисправности на выходе элемента функция, реализуемая неисправной схемой, равна $\bar{f}$, так что любой набор образует единичный диагностический тест.

Случай 2. Пусть функция f – линейная ($q=0$). Тогда схема S по сравнению с предыдущим случаем упрощается до цепочки Z , состоящей из элементов сумм по модулю 2. При этом на входы самого первого элемента E_1 цепочки Z подаются переменные, равные конъюнкциям K_1, K_2 ; на первый вход каждого элемента E_u ($u \in \{2, \dots, t-1+a_0\}$) суммы по модулю 2 в цепочке Z подается выход предыдущего элемента E_{u-1} ; на вторые входы элементов $E_2, E_3, \dots, E_{t-1}$ цепочки Z подаются выходы переменные, равные конъюнкциям $K_3, K_4, \dots, K_t$; наконец, при $a_0=1$ на второй вход элемента E_t подается выход элемента E_0 , реализующего константу 1. Выход элемента E_{t-1+a_0} является выходом схемы. Одиночная инверсная неисправность элемента E_j для любого $j \in \{\bar{a}_0, \dots, t-1+a_0\}$ будет обнаружена при подаче на входы схемы S любого набора $\tilde{\alpha}$, так как на выходе неисправной схемы возникнет значение $\bar{f}(\tilde{\alpha})$.

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что сложность получаемых в доказательствах теорем 1 и 2 схем есть $O(n2^n)$ и что глубину этих схем можно сократить до $n + O(\log_2 n)$, заменив в каждом случае цепочки $Z_i^1, Z_i^2, Z_i^3, Z_i^4, Z$ ($i = \overline{1, q}$) элементов или подсхем на двоичные деревья минимально возможной глубины, состоящие из тех же элементов или подсхем.

Поскольку с очевидностью имеет место равенство $L^{diag}(P_1^{inv}, n) = n$ (верхняя оценка тривиальна, нижняя достигается на конъюнкции n переменных), то из доказательства теорем 1, 2 настоящей статьи вытекает следующее утверждение.

Утверждение 3. $L_{\hat{B}_1}^{detect}(PO_1^{inv}, n) = L_{B_1}^{detect}(PO_1^{inv}, n) = n$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору С. А. Ложкину, к.ф.-м.н. Е. В. Морозову и Д. А. Неяглову за обсуждение работы и ценные замечания.

Список литературы

1. **Яблонский, С. В.** О тестах для электрических схем / С. В. Яблонский, И. А. Чегис // Успехи математических наук. – 1955. – Т. 10, № 4 (66). – С. 182–184.
2. **Чегис, И. А.** Логические способы контроля электрических схем / И. А. Чегис, С. В. Яблонский // Труды МИАН СССР. – 1958. – Т. 51. – С. 270–360.
3. **Редькин, Н. П.** Надежность и диагностика схем / Н. П. Редькин. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 192 с.
4. **Fujiwara, H.** Logic testing and design for testability / H. Fujiwara. – Cambridge, Massachusetts ; London : MIT Press, 1990. – 284 p.
5. **Reddy, S. M.** Easily testable realization for logic functions / S. M. Reddy // IEEE Trans. Comput. – 1972. – Vol. 21, Iss. 1. – P. 124–141.
6. **Saluja, K. K.** Fault detecting test sets for Reed–Muller canonic networks / K. K. Saluja, S. M. Reddy // IEEE Trans. Comput. – 1975. – Vol. 24, № 1. – P. 995–998.
7. **Редькин, Н. П.** О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов / Н. П. Редькин // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 1986. – № 1. – С. 72–74.
8. **Редькин, Н. П.** О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов / Н. П. Редькин // Математические вопросы кибернетики. – Вып. 2. – М. : Наука, 1989. – С. 198–222.
9. **Редькин, Н. П.** О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов / Н. П. Редькин // Известия вузов. Математика. – 1988. – № 7. – С. 57–64.
10. **Редькин, Н. П.** О схемах, допускающих короткие тесты / Н. П. Редькин // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 1988. – № 2. – С. 17–21.
11. **Редькин, Н. П.** О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов / Н. П. Редькин // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 1992. – № 5. – С. 43–46.
12. **Редькин, Н. П.** О синтезе легкотестируемых схем в одном бесконечном базисе / Н. П. Редькин // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2007. – № 3. – С. 29–33.
13. **Коваценок, С. В.** Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для универсальных неисправностей / С. В. Коваценок // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2000. – № 2. – С. 45–47.
14. **Коляда, С. С.** О единичных проверяющих тестах для константных неисправностей на выходах функциональных элементов / С. С. Коляда // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2011. – № 6. – С. 47–49.
15. **Коляда, С. С.** Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисах из элементов, имеющих не более двух входов / С. С. Коляда // Дискретный анализ и исследование операций. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 58–74.
16. **Коляда, С. С.** Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов / С. С. Коляда // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2013. – № 4. – С. 32–34.
17. **Носков, В. Н.** Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем / В. Н. Носков // Дискретная математика. – 1993. – Т. 5, № 4. – С. 3–23.
18. **Hirayama, T.** Easily testable realization based on OR-AND-EXOR expansion with single-rail inputs / T. Hirayama, G. Koda, Y. Nishitani, K. Shimizu // IEICE Trans. Inf. & Syst. – 1999. – Vol. E-82D, № 9. – P. 1278–1286.

19. **Hayes, J. P.** On modifying logic networks to improve their diagnosability / J. P. Hayes // IEEE Trans. Comput. – 1974. – Vol. C-23, № 1. – P. 56–62.
20. **Saluja, K. K.** On minimally testable logic networks / K. K. Saluja, S. M. Reddy // IEEE Trans. Comput. – 1974. – Vol. C-23, № 1. – P. 552–554.
21. **Inose, H.** Synthesis of automatic fault diagnosable logical circuits by function conversion method / H. Inose, M. Sakauchi // Proc. First USA-Japan Computer Conf. – 1972. – P. 426–430.
22. **DasGupta, S.** Rudolph. Dual-mode logic for function-independent fault testing / S. DasGupta, C. R. P. Hartmann, L. D. Rudolph // IEEE Trans. Comput. – 1980. – Vol. C-29, № 11. – P. 1025–1029.
23. **Горяшко, А. П.** О синтезе схем с минимальной трудоемкостью тестирования / А. П. Горяшко // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 1. – С. 145–153.
24. **Редькин, Н. П.** Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов / Н. П. Редькин // Математические вопросы кибернетики. – Вып. 12. – М. : Физматлит, 2003. – С. 217–230.
25. **Бородина, Ю. В.** О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов / Ю. В. Бородина // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2008. – № 1. – С. 40–44.
26. **Бородина, Ю. В.** О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов / Ю. В. Бородина // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. – 2008. – № 5. – С. 49–52.
27. **Бородина, Ю. В.** Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа «0» на выходах элементов / Ю. В. Бородина, П. А. Бородин // Дискретная математика. – 2010. – Т. 22, № 3. – С. 127–133.
28. **Бородина Ю. В.** Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x|y\}$ / Ю. В. Бородина // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVII Междунар. конф. (Казань, 16–20 июня 2014 г.). – Казань : Отечество, 2014. – С. 38–39.
29. **Романов, Д. С.** О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов / Д. С. Романов // Дискретная математика. – 2013. – Т. 25, № 2. – С. 104–120.
30. **Романов, Д. С.** О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно инверсных неисправностей на выходах элементов / Д. С. Романов // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2015. – № 1. – С. 30–37.
31. **Романов, Д. С.** Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины / Д. С. Романов // Дискретная математика. – 2014. – Т. 26, № 2. – С. 100–130.
32. **Носков, В. Н.** О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем / В. Н. Носков // Дискретный анализ. – 1975. – № 27. – С. 23–51.
33. **Погосян, Г. Р.** О проверяющих тестах для логических схем / Г. Р. Погосян. – М. : ВЦ АН СССР, 1982. – 57 с.

References

1. Yablonskiy S. V., Chegis I. A. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Progress of mathematical sciences]. 1955, vol. 10, no. 4 (66), pp. 182–184.
2. Chegis I. A., Yablonskiy S. V. *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of MIAS USSR]. 1958, vol. 51, pp. 270–360.

3. Red'kin N. P. *Nadezhnost' i diagnostika skhem* [Reliability and diagnostics of circuits]. Moscow: Izd-vo MGU, 1992, 192 p.
4. Fujiwara H. *Logic testing and design for testability*. Cambridge, Massachusetts; London: MIT Press, 1990, 284 p.
5. Reddy S. M. *IEEE Trans. Comput.* 1972, vol. 21, iss. 1, pp. 124–141.
6. Saluja K. K., Reddy S. M. *IEEE Trans. Comput.* 1975, vol. 24, no. 1, pp. 995–998.
7. Red'kin N. P. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 1986, no. 1, pp. 72–74.
8. Red'kin N. P. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. Issue 2. Moscow: Nauka, 1989, pp. 198–222.
9. Red'kin N. P. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1988, no. 7, pp. 57–64.
10. Red'kin N. P. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 1988, no. 2, pp. 17–21.
11. Red'kin N. P. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 1992, no. 5, pp. 43–46.
12. Red'kin N. P. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 2007, no. 3, pp. 29–33.
13. Kovatsenko S. V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 15. Calculus mathematics and cybernetics]. 2000, no. 2, pp. 45–47.
14. Kolyada S. S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 2011, no. 6, pp. 47–49.
15. Kolyada S. S. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsiy* [Discrete analysis and research of operations]. 2013, vol. 20, no. 2, pp. 58–74.
16. Kolyada S. S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 2013, no. 4, pp. 32–34.
17. Noskov V. N. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 1993, vol. 5, no. 4, pp. 3–23.
18. Hirayama T., Koda G., Nishitani Y., Shimizu K. *IEICE Trans. Inf. & Syst.* 1999, vol. E-82D, no. 9, pp. 1278–1286.
19. Hayes J. P. *IEEE Trans. Comput.* 1974, vol. C-23, no. 1, pp. 56–62.
20. Saluja K. K., Reddy S. M. *IEEE Trans. Comput.* 1974, vol. C-23, no. 1, pp. 552–554.
21. Inose H., Sakauchi M. *Proc. First USA-Japan Computer Conf.* 1972, pp. 426–430.
22. DasGupta S. *IEEE Trans. Comput.* 1980, vol. C-29, no. 11, pp. 1025–1029.
23. Goryashko A. P. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and remote control]. 1981, no. 1, pp. 145–153.
24. Red'kin N. P. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. Issue 12. Moscow: Fizmatlit, 2003, pp. 217–230.
25. Borodina Yu. V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Calculus mathematics and cybernetics]. 2008, no. 1, pp. 40–44.
26. Borodina Yu. V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics]. 2008, no. 5, pp. 49–52.

27. Borodina Yu. V., Borodin P. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2010, vol. 22, no. 3, pp. 127–133.
28. Borodina Yu. V. *Problemy teoreticheskoy kibernetiki. Materialy XVII Mezhdunar. konf. (Kazan', 16–20 iyunya 2014 g.)* [Problems of theoretical cybernetics. Proceedings of XVII International conference (Kazan, 16–20 June 2014)]. Kazan: Otechestvo, 2014, pp. 38–39.
29. Romanov D. S. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2013, vol. 25, no. 2, pp. 104–120.
30. Romanov D. S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 1. Calculus mathematics and cybernetics]. 2015, no. 1, pp. 30–37.
31. Romanov D. S. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2014, vol. 26, no. 2, pp. 100–130.
32. Noskov V. N. *Diskretnyy analiz* [Discrete analysis]. 1975, no. 27, pp. 23–51.
33. Pogosyan G. R. *O proveryayushchikh testakh dlya logicheskikh skhem* [On fault detection testing of logic circuits]. Moscow: VTs AN SSSR, 1982, 57 p.

Романов Дмитрий Сергеевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математической
кибернетики, Московский
государственный университет
имени М. В. Ломоносова (Россия,
г. Москва, Ленинские горы, 1)

E-mail: romanov@cs.msu.ru

Romanov Dmitriy Sergeevich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematical
cybernetics, Lomonosov Moscow State
University (1 Leninskie gory street, Mos-
cow, Russia)

УДК 519.718

Романов, Д. С.

Метод синтеза неизбыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один / Д. С. Романов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 38–54.